Développement : Théorème de Lévy et TCL.

RM

2022-2023

Référence :

1. Analyse pour l'agrégation - Zuily, Queffélec

Énoncé :

Théorème (de Lévy) 1 : Soit X,$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles, alors on a équivalence entre :

i) X_n converge en loi vers X.

ii) La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ_X.

Développement (Théorème Centrale Limite) 2 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire réelle indépendantes et identiquement distribuées admettant des moments d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. En posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,on a alors

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

On rappelle avant quelques notions :

Définition 3 : On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ les fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ les fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini (donc $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$).
On dit qu'une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle X si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.

On note $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$.

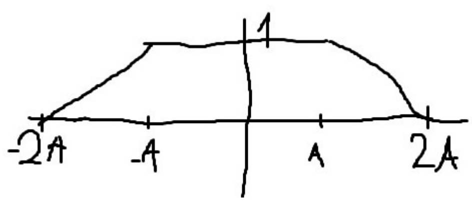
Théorème 4 : Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Lemme 5 : Soit X,$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles. Alors il y a équivalence :

- $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$.
- $\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.

Démonstration : L'implication est immédiate car $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

Pour la réciproque, soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $A > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \geq A) \leq \varepsilon$. On pose $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la fonction trapézoïdale suivante :



On remarque alors que

$$\int_{\mathbb{R}} 1-\varphi d\mathbb{P}_X \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} d\mathbb{P}_X = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]}(X)] = \mathbb{P}(|X|\geq A) \leq \varepsilon.$$

Calculons alors $\mathbb{E}[f(X_n)] - E[f(X)]$ et montrons que c'est inférieure à epsilon pour avoir la convergence et donc conclure ce lemme.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)] &= \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_X \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) d\mathbb{P}_{X_n} + \int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_X - \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) d\mathbb{P}_X. \\
&= A_n + B_n + C_n.
\end{aligned}$$

- Pour A_n, on a que $|A_n| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} 1-\varphi d\mathbb{P}_{X_n}$. On passe alors à la limite sup pour avoir

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |A_n| \leq \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}} 1-\varphi d\mathbb{P}_X\right) \leq \varepsilon \|f\|_\infty.$$

- Comme $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a que $f\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et donc par hypothèse, on a

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_X = \mathbb{E}[f\varphi(X_n)] - E[f\varphi(X)] = 0$$

- Pour C_n c'est pareil que pour A_n car on a déjà le $\mathbb{P}_X$. On a donc

$$|C_n| \leq \|f\|_\infty \varepsilon$$

Finalement on obtient la relation finale

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)] = \overline{\lim_{n\to+\infty}} |A_n| + |B_n| + |C_n| \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon$$

Ceci prouve bien la convergence et donc conclut le lemme. □

Lemme 6 : Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergeant vers $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^z.$$

Démonstration : La suite z_n/n tendant vers 0, on peut supposer que $1+z_n/n$ ne touche pas la demi-droite $\mathbb{R}_-$. On utilise alors la détermination principale du logarithme :

$$log(z) = \int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{z-1}{t(z-1)+1} dt$$

On a alors $log(z+1) = z + o(z)$ quand z tends vers 0, d'où

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^{n\log(1+\frac{z_n}{n})} = e^{n(\frac{z_n}{n}+o(z_n/n))} = e^{z_n+o(z_n)} \to e^z$$

Résolution :

Démonstration (Lévy) : Encore une fois, l'implication est assez facile. la fonction $x \mapsto e^{itx}$est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathbb{E}[e^{itX_n}] \to \mathbb{E}[e^{itX}]$ par le Lemme 5, ce qui équivaut à $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$.

Pour la réciproque, on considère $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et on pose $f(x) = \mathcal{F}(\varphi)(x)$ la transformée de Fourier de φ. On a donc f dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et grâce aux théorèmes de convergence dominée et Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\hat{\varphi}(X_n)] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\int_{\mathbb{R}} e^{-itX_n}\varphi(t)dt] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}[e^{-itX_n}]dt \text{ Par Fubini} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \varphi(t)\mathbb{E}[e^{-itX_n}]dt \text{ Par convergence dominée} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}[e^{-itX}]dt \text{ Par hypothèse} \\
&= \mathbb{E}[\hat{\varphi}(X)] = \mathbb{E}[f(X)].
\end{aligned}$$

On a donc prouvé le résultat pour l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier.
Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, et que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a que cette image contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Or $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On peut alors prendre g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$. Alors

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq |\mathbb{E}[(f-g)(X_n)]| + |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| + |\mathbb{E}[(f-g)(X)]|$$

Comme g est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, par bijection de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, g est l'image d'une fonction par la transformée de Fourier. Or on a prouver avant que le résultat était vraie dans cette situation. Donc $\lim_{n\to+\infty} |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| = 0$.
On a que $(f-g)(X_n) \leq \varepsilon$ et $(f-g)(X) \leq \varepsilon$ donc $|\mathbb{E}[(f-g)(X_n)]| + |\mathbb{E}[(f-g)(X)]| \leq 2\varepsilon$. Finalement, on a

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)][\leq 2\varepsilon$$

On a donc prouvé le résultat pour tout f dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Donc d'après le lemme 5, cela implique que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Démonstration (TCL) : Sans perte de généralité, on peut supposer $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. On va donc montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la gaussienne standard g grâce aux théorème de Lévy.
Soit $\varphi_{X_1}(t)$ la fonction caractéristique de X_1. Puisque $X_1 \in L^2$, φ_{X_1} est de classe $\mathcal{C}^2$, et on a $\varphi_{X_1}(0) = 1$,$\varphi'_{X_1}(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ car $\mu = 0$, enfin $\varphi''_{X_1}(0) = \mathbb{E}[-X_1^2] = -1$.

> On a bien $\mathbb{E}[-X_1^2] = -1$ car d'après la formule de la variance, $Var(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2$ où $Var(X_1) = 1$ et $\mathbb{E}[X_1]^2 = 0$. Donc $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ et donc $\mathbb{E}[-X_1^2] = -1$.

On a donc pour la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$:

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}[e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}] = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}] \overset{\text{indépendance}}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}] = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

On fait ensuite un développement de taylor à l'origine :

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}) &= \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2n}\varphi X_1''(0) + o(1/n) \\
&= 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)
\end{aligned}$$

On a donc finalement que

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2/2 + \varepsilon_n}{n}\right)^n$$

On utilise alors le lemme 6 avec $z_n = -t^2/2 + \varepsilon_n$ pour obtenir que

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = e^{-t^2/2}$$

Or la fonction caractéristique de la gaussienne standard g est $\varphi_g(t) = e^{-t^2/2}$. On a donc bien finalement la convergence en loi voulus.